

Surpreendentes $f(x, y)$ conformes, e um pouco mais.

The surprising conformal functions $f(x, y)$, and a little more.

A.F.F. Teixeira*

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil

Resumo: Começamos apresentando os alicerces para a construção e compreensão das funções $f(x, y)$ conformes, *grosso modo* o mesmo que funções analíticas $f(z)$. Depois descrevemos algumas das muitas utilidades e propriedades surpreendentes dessas funções.

Palavras chave: função harmônica, dual harmônica, função conforme, teorema de Cauchy, singularidades, resíduo, fluidos bidimensionais, operador nabla complexo, problema de Dirichlet, problema de Neumann.

Abstract: We first give the building blocks to construct the conformal functions $f(x, y)$, *grosso modo* the same as analytical functions $f(z)$. We then describe some of the many utilities and surprising properties of these functions.

Keywords: harmonic function, harmonic dual, conformal function, Cauchy theorem, singularities, residue, two-dimensional fluids, nabla complex operator, Dirichlet problem, Neumann problem.

1. INTRODUÇÃO

Fui apresentado aos números complexos com 16 anos de idade, na 3^a série do científico do Colégio Mello e Souza (em Copacabana, no Rio de Janeiro, 1954); no mesmo ano tive meu segundo contacto com eles no Instituto Universitário, um cursinho preparatório para vestibular de Engenharia. Esses números me encantaram: a curiosíssima fórmula $e^{i\pi} = -1$, a de Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, e o teorema de DeMoivre, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, me descortinavam algo diferente, fantástico.

Nos seguintes 5 anos minha curiosidade sobre os complexos foi cerceada por meus estudos de Engenharia Civil; somente nas férias universitárias, e nos acampamentos do serviço militar obrigatório, em Jericó, eu pude coletar noções desarticuladas de analiticidade, mapas conformes, integrações complexas, singularidades, *etc.* Mais meio século se passou, envolvendo-me na renitente atmosfera 'publish or perish' em minhas pesquisas em Física Teórica.

Mas agora, compulsoriamente aposentado do CBPF por

idade, eu ganhei uma oportunidade para concatenar tudo aquilo, e a estou aproveitando. Minha satisfação neste reestudo e aprendizado, eu tento aqui partilhá-la com você.

Vou lhe relatar aqui tópicos sobre função $f(x)$ real analítica, $f(x)$ complexa analítica, $f(x, y)$ real analítica, $h(x, y)$ harmônica, dual harmônica, $f(x, y)$ complexa, $f(x, y)$ conforme, integrais no plano complexo, teorema de Cauchy, convergência de série de potências, singularidades, resíduo, interrelação $c \iff \bar{c}$, fluidos bidimensionais, operador ∇ complexo, e singularidades no infinito. Fora algumas poucas contribuições pessoais, todos estes tópicos foram extraídos das referências citadas na Bibliografia.

2. FUNÇÃO $f(x)$ REAL ANALÍTICA

Considere um intervalo aberto \mathcal{R} , da reta real x . Neste intervalo nós definimos uma função real $f(x)$; ela associa a cada ponto $x \in \mathcal{R}$ um, e somente um, valor (número) real.

A função poderia ser dada por uma lista que exibisse a associação, mas a lista teria que ser infinitamente longa. Como elaborá-la é humanamente impossível, este texto abordará somente funções dadas por expressões matemáticas.

Vamos supor $f(x)$ contínua; isto é, os valores associados a

*Electronic address: teixeira@cbpf.br

pontos vizinhos serão também vizinhos. Mais que contínua, começaremos supondo $f(x)$ *analítica regular*. Ou seja, suporemos que $f(x)$ possa ser expandida em série de potências a partir de qualquer ponto a do aberto \mathcal{R} ,

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots, \quad (1)$$

em que os coeficientes c_i são números reais e finitos. Os c_i dependem do ponto a ; isto é, se a expansão for feita a partir de outro ponto a' , teremos outros valores c'_i .

A (1) é a definição de analiticidade regular mais empregada; ela implica a existência da função e de todas as suas derivadas, na região \mathcal{R} de analiticidade. Aqui, *existir* significa ser única e ser finita. A propósito, por vezes define-se analiticidade regular via a existência da função e de todas as suas derivadas na região \mathcal{R} ; essa definição é equivalente à apresentada acima. Como exemplos de funções analíticas regulares em todo o eixo x temos todos os polinômios em x , a exponencial e^x , e as funções trigonométricas $\sin x$ e $\cos x$ (tais funções são então ditas *inteiras*); e a função $\tan x$ é analítica regular em cada intervalo aberto $(n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2)$, com $n =$ inteiro.

Costuma-se dizer que as funções analíticas regulares são *rígidas* [1, p. 219]; isto porque seus valores, em certos conjuntos infinitos de pontos, determinam os valores em toda a restante região de analiticidade regular. Expliquemos esta questão: digamos que alguém conheça uma função analítica regular $f(x)$ em um intervalo \mathcal{R} da reta x , mas esse alguém se recuse a nos revelar qual é a função. Então lhe pedimos os valores dela somente ao longo de um qualquer pequeno segmento \mathcal{S} do intervalo, tão pequeno quanto ele queira; a isso ele acede. O conhecimento desses valores (que são infinitos em quantidade, deixe-se claro) nos permitirá descobrir os valores da função analítica em toda a restante região de analiticidade regular. Veja a Figura 1.



Figura 1: Garantem-nos que uma função $f(x)$ é analítica regular no intervalo $\mathcal{R} = (a, b)$ da reta x , mas são-nos dados a conhecer seus valores somente no intervalo $\mathcal{S} = (c, d)$. Com este conhecimento podemos descobrir os demais valores de $f(x)$ em toda a região \mathcal{R} .

Mas um pensamento nos ocorre: se o segmento \mathcal{S} pode ser tão pequeno quanto se queira, então o conhecimento dos valores da função analítica regular em apenas uma metade de \mathcal{S} já bastaria para nossos propósitos. Mais ainda, o conhecimento dos valores em uma metade daquela metade de \mathcal{S} também bastaria, e assim por diante. Isso sugere que não precisamos dos valores em um segmento \mathcal{S} *finito*, bastam os valores de $f(x)$ analítica regular em um ponto a de

acumulação da região \mathcal{R} de analiticidade regular, e em sua vizinhança infinitesimal. Esses valores são suficientes para descobrirmos todas as derivadas f', f'', \dots em a , a fim de usá-las na conhecida expansão em série de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \dots \quad (2)$$

Um modo para descobrirmos essas derivadas está descrito no Apêndice A.

Percebe-se uma consequência imediata da *rigidez* das funções analíticas: se duas funções reais, $f(x)$ e $g(x)$, ambas analíticas regulares em um aberto \mathcal{R} , tiverem mesmos valores em qualquer intervalo (mesmo que infinitesimal) interior a \mathcal{R} , então elas coincidirão em todo o \mathcal{R} .

Ainda, a *rigidez* de uma função analítica $f(x)$ em um intervalo \mathcal{R} nos facultam, por vezes, *estender* a função para além de \mathcal{R} , mantendo a analiticidade. Vejamos isto mediante um exemplo: seja a série de potências

$$S(x) := 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad (3)$$

visualizada como as duas linhas cheias na Figura 2.

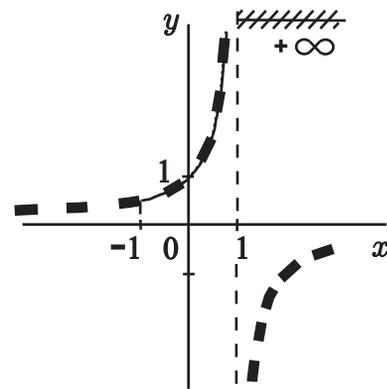


Figura 2: As duas linhas cheias representam a série $S(x) := 1 + x + x^2 + \dots$. As duas linhas grossas tracejadas são os ramos da hipérbole $H(x) := 1/(1-x)$; esta função coincide com a série $S(x)$ no intervalo $(-1, 1)$. Então a linha tracejada na região $(-\infty, -1]$ representa a *extensão analítica* da função S para esta região.

Percebemos naquela figura que, no intervalo aberto $(-1, 1)$, esta série é finita e tem finitas todas as suas derivadas; neste intervalo a série é analítica, portanto. Entretanto, a figura evidencia que a linha cheia que representa (3) poderia prosseguir suavemente para a região $(-\infty, -1]$, embora a expressão matemática $S(x)$ não a descreva. Mas percebemos que uma outra expressão matemática,

$$H(x) := \frac{1}{1-x}, \quad (4)$$

gera os mesmos valores que a função analítica $S(x)$ na região $(-1, +1)$ e representa uma função também analítica na região $(-\infty, +1)$ [e também em $(+1, +\infty)$]. Dizemos então que H provê a *extensão analítica* de S para a região $(-\infty, -1]$.

Para enfatizar a importância da rigidez das funções analíticas, considere a Figura 3. Sem qualquer cálculo, vemos que a função que representa a união $a \cup b$ dos arcos de círculo a e b na Figura não pode ser analítica. Com efeito, se vê que o arco de círculo c , prolongamento analítico do arco a , não coincide com o arco b .

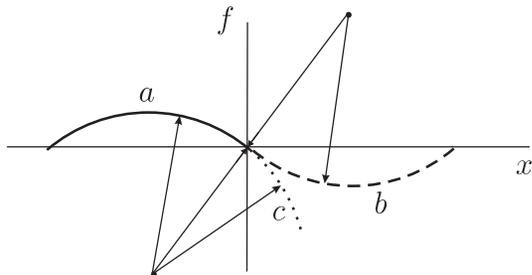


Figura 3: A função representada pelos arcos de círculo a e b não é analítica, pois o arco de círculo c , que representa o prolongamento analítico de a , não se sobrepõe ao arco b .

Por vezes ocorre uma função $f(x)$ ser analítica em uma região \mathcal{R} exceto em alguns pontos isolados. Nestes casos, tolera-se dizer que $f(x)$ é ainda analítica em \mathcal{R} , porém com *singularidades* naqueles pontos isolados. Por exemplo, a função $1/(1-x)$ é dita analítica em toda a extensão $\mathcal{R} = (-\infty, \infty)$, porém com uma singularidade no ponto $x = 1$. E a função $\tan x$ é analítica em todo o eixo x , com singularidades nos pontos $x = (n + 1/2)\pi$, sendo $n = \text{inteiro}$. A propósito, as funções analíticas com ou sem singularidades são geralmente designadas *analíticas*, simplesmente.

3. FUNÇÃO $f(x)$ COMPLEXA ANALÍTICA

Seja um aberto \mathcal{R} no eixo real x ; uma função complexa $f(x)$ associa um, e somente um, valor (número) complexo a cada ponto de \mathcal{R} . A função é dita contínua se associar valores complexos vizinhos a pontos vizinhos. E diremos neste texto que a função $f(x) = u(x) + iv(x)$ é analítica se ambas funções reais $u(x)$ e $v(x)$ forem analíticas; alerte-se que esta definição não tem aceitação geral.

Podemos visualizar a função $f(x) = u(x) + iv(x)$ como duas funções reais, definidas no aberto \mathcal{R} ; por exemplo, a Figura 4 a mostra a função $f(x) = \cos x + i \sin x$ no intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$. Outro modo de visualizar consiste em desenhar, no plano complexo $[u, v]$, uma curva parametrizada

com o valor de x ; por exemplo, a Figura 4 b mostra a mesma função $f(x) = \cos x + i \sin x$ no intervalo $-3/2 < x < 3/2$.

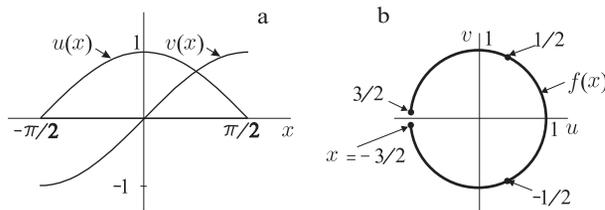


Figura 4: **a:** Visualização da função complexa $f(x) = u(x) + iv(x)$ com $u(x) = \cos x$ e $v(x) = \sin x$ no intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$.

b: No plano complexo $[u, v]$, visualização da mesma função complexa $f(x)$, no intervalo $-3/2 < x < 3/2$.

4. FUNÇÃO $f(x,y)$ REAL ANALÍTICA

Pensemos no plano cartesiano $\{x, y\}$, estendendo-se indefinidamente para todos os lados. Mais comedidamente, restringimo-nos a alguma região aberta \mathcal{R} desse plano. Definamos nessa região uma função real $f(x, y)$: ela é uma regra que associa, a cada ponto $[x, y]$ de \mathcal{R} , um (e somente um) número real. Aqui interessam-nos unicamente as funções contínuas, isto é, aquelas que associam, a pontos $[x, y]$ vizinhos, valores de f também vizinhos; e por ora não exigimos analiticidade para f .

Podemos visualizar a função f desenhando em \mathcal{R} a família das linhas $f(x, y) = \text{const}$ e numerando cada linha com o valor da constante correspondente. Veja a Figura 5 a.

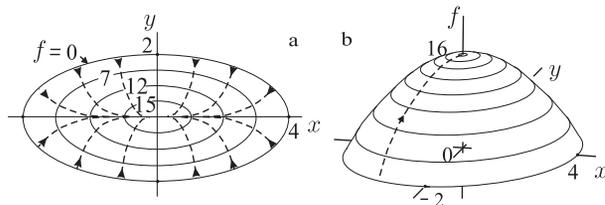


Figura 5: **a:** Em traços contínuos, linhas $f = \text{const}$ de uma função real $f(x, y)$; as linhas tracejadas e orientadas indicam, em cada ponto, a direção e sentido do campo vetorial $\text{grad } f$.

b: Superfície representante da função f .

Se tanto $f(x, y)$ como suas derivadas primeiras forem contínuas em \mathcal{R} , a família de linhas $f(x, y) = \text{const}$ gerará um *campo vetorial* bidimensional real

$$\vec{F}(x, y) := \text{grad } f(x, y) \equiv \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}, \quad (5)$$

cujos vetores são perpendiculares às linhas $f(x, y) = \text{const}$, e têm geralmente diferentes módulos (tamanhos). O campo vetorial (5) é *irrotacional*, porque $\text{rot } \vec{F}$ é nulo em todo o \mathcal{R} , e é dito *conservativo*. A função $f(x, y)$ é chamada *função potencial* do campo vetorial \vec{F} , e as linhas $f(x, y) = \text{const}$ são chamadas *equipotenciais* do campo \vec{F} .

Vamos desenhar também, no aberto \mathcal{R} , as linhas ortogonais às equipotenciais; estas novas linhas serão denominadas *linhas do campo* \vec{F} , porque suas tangentes acompanham em cada ponto o correspondente vetor \vec{F} . Para termos a equação das linhas do campo lembremos que ao longo de cada linha equipotencial $f = \text{const}$ ocorre $df (\equiv f_x dx + f_y dy) = 0$, daí as linhas equipotenciais têm $dy/dx = -f_x/f_y$. Como as linhas do campo são ortogonais às linhas equipotenciais, elas terão tangentes com coeficiente angular $+f_y/f_x$. Ou seja, se expressadas do modo $y = y(x)$, as linhas do campo serão obtidas por integração de

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{f_y(x, y)}{f_x(x, y)}. \quad (6)$$

Perceba que cada linha de campo pode ser descrita por uma equação $g_\alpha(x, y) = 0$, em que o parâmetro de integração α designa a especial linha.

Há outra visualização de $f(x, y)$ real, também muito intuitiva: como uma superfície estendida sobre a região \mathcal{R} ; os pontos da superfície estariam a diferentes alturas $f(x, y)$ relativamente ao plano $\{x, y\}$. Veja a Figura 5 b. Nesta *superfície representante*, as linhas $f(x, y) = \text{const}$ seriam as curvas de nível, como as trilhas horizontais marcadas por gado em encostas de morros; essas linhas são convenientemente numeradas com o valor da constante correspondente (a altitude). E as linhas ortogonais às curvas de nível se orientam segundo a maior declividade local, como os caminhos seguidos pelas águas das chuvas nas vertentes dos morros.

As funções reais *analíticas* $f(x, y)$ são uma classe especial das funções $f(x, y)$ reais; tanto a $f(x, y)$ real analítica como todas as suas derivadas parciais, de todas as ordens, *existem* em todos os pontos da região \mathcal{R} de analiticidade. Novamente *existir*, neste contexto, significa ser única e ser finita. Por exemplo, a função $f(x, y) = 16 - x^2 - 4y^2$, visualizada nas Figuras 5 a e 5 b, é analítica em todo o plano $\{x, y\}$.

Por definição, uma função $f(x, y)$ real é *analítica regular* em um aberto \mathcal{R} se puder ser desenvolvida em série de potências a partir de qualquer ponto $[a, b] \in \mathcal{R}$ do modo

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f + \frac{1}{1!} [(x-a)f_x + (y-b)f_y] \quad (7) \\ & + \frac{1}{2!} [(x-a)^2 f_{xx} + 2(x-a)(y-b)f_{xy} + (y-b)^2 f_{yy}] \\ & + \frac{1}{3!} [(x-a)^3 f_{xxx} + 3(x-a)^2(y-b)f_{xxy} \\ & + 3(x-a)(y-b)^2 f_{xyy} + (y-b)^3 f_{yyy}] + \dots, \end{aligned}$$

onde as comas subscritas indicam derivadas parciais, e onde

tanto f como todas as derivadas $f_{,xx\dots yy\dots}$ são constantes calculadas no ponto $[a, b]$. Essas derivadas podem ser obtidas a partir do valor da função no ponto $[a, b]$ e em sua vizinhança *bidimensional* infinitesimal, isto é, nos pontos $[a + m\varepsilon, b + n\varepsilon]$, com m e n assumindo independentemente os valores $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e sendo ε infinitesimal.

Assim, temos as derivadas primeiras

$$\begin{aligned} f_x(a, b) &= \frac{f(a + \varepsilon, b) - f(a - \varepsilon, b)}{2\varepsilon} \quad (8) \\ \text{e } f_y(a, b) &= \frac{f(a, b + \varepsilon) - f(a, b - \varepsilon)}{2\varepsilon}, \end{aligned}$$

prontas para uso na série de Taylor (7). Obtemos as derivadas superiores usando repetidamente

$$\begin{aligned} F_x(c, d) &= \frac{F(c + \varepsilon, d) - F(c - \varepsilon, d)}{2\varepsilon} \quad (9) \\ \text{e } F_y(c, d) &= \frac{F(c, d + \varepsilon) - F(c, d - \varepsilon)}{2\varepsilon}, \end{aligned}$$

onde F é qualquer derivada $f_{,xx\dots yy\dots}$ e onde $[c, d] = [a + m\varepsilon, b + n\varepsilon]$.

Semelhançamente às funções $f(x)$ reais analíticas, também as funções $f(x, y)$ reais analíticas são *rígidas*. Portanto, duas funções analíticas em um aberto bidimensional \mathcal{R} serão iguais se seus valores coincidirem na vizinhança *bidimensional* infinitesimal de algum ponto de \mathcal{R} .

Uma nota: na Seção 8 apresentaremos uma classe especial de funções *complexas* analíticas $f(x, y)$, que denominaremos *funções conformes*, nas quais a rigidez é ainda maior que a das funções $f(x, y)$ reais analíticas.

Se uma função $f(x, y)$ for real analítica regular em um aberto \mathcal{R} exceto em alguns pontos de \mathcal{R} , diremos tratar-se de função *analítica com singularidades* naqueles pontos. Por exemplo, a função $f(x, y) = y/[(x-m)(x-n)]$ é analítica em todo o plano $\{x, y\}$, com singularidades nas retas $x = m$ e $x = n$. E a função $1/[(x-a)^2 + (y-b)^2]$ é singular no ponto $[a, b]$. Convém saber que as funções $f(x, y)$ reais analíticas tanto regulares como as com singularidades são frequentemente denotadas abreviadamente *funções reais analíticas*.

5. FUNÇÃO $h(x, y)$ HARMÔNICA

Uma classe particular de funções $f(x, y)$ reais analíticas é de especial interesse para nós: a classe das funções *harmônicas* h , aquelas que têm laplaceano nulo. Elas serão essenciais para a apreciação das funções $f(x, y)$ complexas conformes, que é o nosso objetivo maior.

Se h estiver expressa em coordenadas cartesianas, sua *harmonicidade* em um aberto \mathcal{R} significa ter

$$\Delta h(x, y) := h_{,xx} + h_{,yy} = 0, \quad (10)$$

na região \mathcal{R} ; as comas subscritas indicam derivadas parciais.

Um exemplo trivial de função harmônica *regular* em todo aberto do plano $\{x, y\}$ é

$$h = \text{const}; \tag{11}$$

outros exemplos regulares são os polinômios

$$h(x, y) = \begin{cases} x, & x^2 - y^2, & x^3 - 3xy^2, \dots \\ y, & 2xy, & 3x^2y - y^3, \dots \end{cases}; \tag{12}$$

perceba que (12) são as partes $\begin{cases} \text{real} \\ \text{imaginária} \end{cases}$ das potências

$(x + iy)^n, n = 1, 2, 3, \dots$.

Há também funções harmônicas com singularidades; dois exemplos singulares na origem são

$$h(x, y) = \begin{cases} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1}(y/x) \end{cases}. \tag{13}$$

Outros exemplos, também singulares na origem, são

$$h(x, y) = \begin{cases} x/r^2, & (x^2 - y^2)/r^4, & (x^3 - 3xy^2)/r^6, \dots \\ -y/r^2, & -2xy/r^4, & -(3x^2y - y^3)/r^6, \dots \end{cases} \tag{14}$$

sendo $r^2 := x^2 + y^2$; perceba que (14) são as partes

$\begin{cases} \text{real} \\ \text{imaginária} \end{cases}$ das potências $(x + iy)^{-n}, n = 1, 2, 3, \dots$.

Uma infinidade de funções harmônicas pode ser obtida por combinações lineares das (11) – (14), com coeficientes reais. Obtemos funções harmônicas também a partir de expressões matemáticas em que x e y compareçam somente combinados na forma $(x + iy)$, e nas quais separamos as partes real e imaginária; por exemplo, o desdobramento de

$$\sin(x + iy) \equiv \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x \tag{15}$$

nos revela que $\sin x \cosh y$ e $\sinh y \cos x$ são harmônicas.

Como qualquer função $f(x, y)$ real contínua, também as funções harmônicas $h(x, y)$ são facilmente visualizadas mediante as linhas $h(x, y) = \text{const}$ desenhadas na região \mathcal{R} de harmonicidade. E também como anteriormente, podemos desenhar linhas l , ortogonais às linhas $h(x, y) = \text{const}$. Veja a Figura 6 a.

A propósito, essas linhas ortogonais nos permitem testar graficamente se uma função $f(x, y)$ é harmônica, do seguinte modo: primeiro desenhe-se todas as linhas $f(x, y) = \text{const}$ com valores de 'const' separadas por valores múltiplos de ϵ , sendo ϵ suficientemente pequeno. Depois considere-se a família das linhas ortogonais a aquelas. Se for possível selecionar, dentre esta nova família, uma coleção que forme

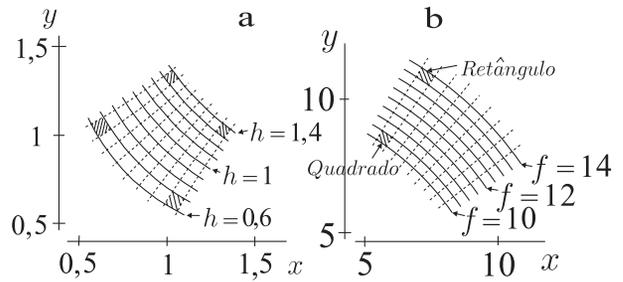


Figura 6: **a:** Em traços contínuos, linhas com valor constante da função harmônica $h = xy$, com separações $\delta h = 0,1$. Foi possível selecionar-se linhas tracejadas, ortogonais às anteriores, tais que somente quase-quadrados fossem formados.

b: Em traços contínuos, linhas com valor constante da função não-harmônica $f = \sqrt{x^2 + y^2}$, com separações $\delta f = 0,5$. Não se consegue selecionar linhas tracejadas, ortogonais às anteriores, tais que somente quase-quadrados sejam formados.

somente quadrados com as linhas $f(x, y) = \text{const}$, a função f será harmônica. Veja a Figura 6.

Sendo $h(x, y)$ harmônica, o campo vetorial $\text{grad } h$ tem divergência nula; e como $\text{grad } h$ é também irrotacional, ele pode representar o campo das velocidades de um fluido bidimensional incompressível, sem vorticidades e sem fontes/sumidouros. Neste caso, as linhas $h(x, y) = \text{const}$ são as *linhas equipotenciais* do campo. As *linhas do campo* (aquelas seguidas por um elemento do fluido em movimento) são as linhas $l(x, y) = \text{const}$, normais às linhas equipotenciais.

Do mesmo modo como uma função $f(x, y)$ real qualquer, podemos visualizar uma função harmônica $h(x, y)$ como uma folha rígida estendida sobre a região \mathcal{R} de definição. Nessa superfície representante, podemos projetar as linhas $h(x, y) = \text{const}$, e numerá-las com essa constante. Também as linhas ortogonais $l(x, y) = \text{const}$ podem ser projetadas na superfície.

As funções harmônicas $h(x, y)$ têm propriedades muito interessantes. Eis algumas:

- Todas as derivadas parciais de uma função harmônica, de todas as ordens, são também funções harmônicas; você pode conferir isso nas funções de (11) a (15).

- *Teorema do valor médio*, de Gauss: desenhe-se um círculo S^1 no interior da região \mathcal{R} da harmonicidade, e compute-se os valores de $h(x, y)$ ao longo desse círculo; a média h_c desses valores é o valor de h no centro do círculo. Claro está que esse valor é também a média dos valores em todo o interior do círculo. E também claro está que o volume do sólido encimado pela superfície representante de $h(x, y)$ no interior do círculo é igual ao volume do cilindro reto de altura h_c .

Veja a Figura 7.

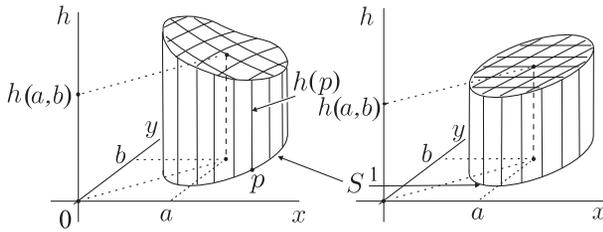


Figura 7: Um círculo S^1 com centro $[a, b]$ e raio qualquer está inteiro na região de harmonicidade de uma função $h(x, y)$; sobre o círculo com pontos p , levanta-se uma superfície cilíndrica (listrada verticalmente) com altura variada $h(p)$; essa superfície tem mesma área que o cilindro circular reto com base S^1 e altura $h(a, b)$.

- **Teoremas do máximo e do mínimo:** o máximo e o mínimo de uma função harmônica em \mathcal{R} sempre ocorrem na borda de \mathcal{R} . Consequentemente não há linhas $h(x, y) = \text{const}$ fechadas, na região de harmonicidade. E as superfícies representantes das funções harmônicas não têm picos nem depressões. Veja a Figura 8.

- **Hiperbolicidade:** a superfície representante de uma função harmônica tem curvatura gaussiana negativa em todos os seus pontos, ou é plana. Veja a Figura 9 e o Apêndice B.

- **Preservação da harmonicidade** sob mapa conforme: veremos na seção 8.1.

- **Extensão harmônica única:** extensões analíticas de uma função harmônica em \mathcal{R} para além de \mathcal{R} , quando possíveis, mantêm a harmonicidade.

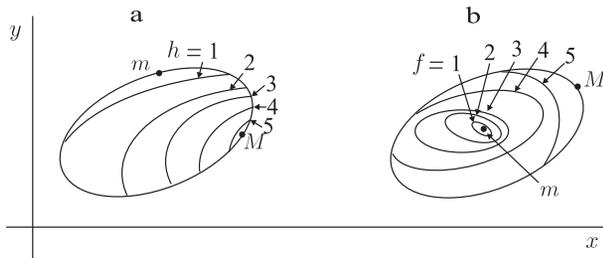


Figura 8: **a:** Os pontos de mínimo m e máximo M de uma função harmônica $h(x, y)$ sempre estão na borda da região de harmonicidade.

b: A existência de linhas $f(x, y) = \text{const}$ fechadas indica que $f(x, y)$ não é função harmônica.

Às vezes convém expressar uma função harmônica em coordenadas não-cartesianas. Em especial, as coordenadas polares muito frequentemente são as mais adequadas; nestes

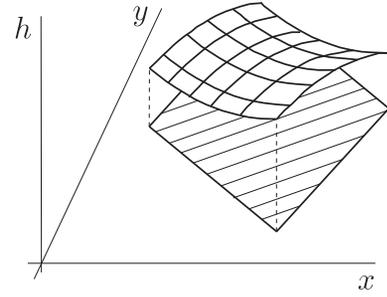


Figura 9: Superfície hiperbólica representante de uma função harmônica não-linear, $h(x, y) \neq \alpha + \beta x + \gamma y$.

casos, a função harmônica satisfará

$$\Delta h(r, \theta) \equiv h_{,rr} + r^{-1}h_{,r} + r^{-2}h_{,\theta\theta} = 0. \quad (16)$$

Algumas harmônicas são $h = \text{const}$ e

$$h(r, \theta) = \begin{cases} r^n \cos n\theta \\ r^n \sin n\theta \end{cases}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (17)$$

que são as partes real e imaginária de $(re^{i\theta})^n$, já apontadas na (12); e algumas harmônicas com singularidade na origem $r = 0$ são $h = \ln r$, $h = \theta$, e

$$h(r, \theta) = \begin{cases} r^{-n} \cos n\theta \\ -r^{-n} \sin n\theta \end{cases}, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad (18)$$

estas últimas são as partes real e imaginária de $(re^{i\theta})^{-n}$, já vistas na (14).

Há muitos desafios interessantes em funções harmônicas 2D; dois dos desafios mais populares são o problema de Dirichlet e o de Neumann:

- **Problema de Dirichlet:** dado um contorno fechado γ no plano $\{x, y\}$, e dada uma função real f ao longo de γ , ache-se a função harmônica h no interior de γ que coincida com f em γ ; ocorre que essa h sempre existe, e que ela é única.

Isto é facilmente intuído na termostática, onde a temperatura satisfaz a uma equação de Laplace: se linhas formando um contorno fechado forem mantidas a temperaturas invariantes ao longo do tempo, a função temperatura $T(x, y)$ no interior do contorno tenderá ao equilíbrio, quando então T será harmônica, $\Delta T = 0$. Veja a Figura 10 **a**.

Alguns pares $[\gamma, f(\gamma)]$ e suas soluções $h(x, y)$ para o problema de Dirichlet estão resumidamente indicados nos Apêndices **C**, **D**, **E**, **F**.

No caso especial de γ ser um círculo com raio a e centro na origem, Poisson encontrou a solução (demonstração no Apêndice **G**)

$$h(r, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi, \quad (19)$$

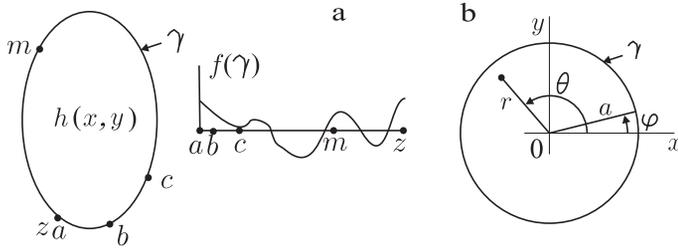


Figura 10: **a:** Dirichlet: dado um contorno fechado γ e uma função real f em γ , sempre há uma, e somente uma, função harmônica $h(x,y)$ no interior de γ com os valores $f(\gamma)$ em γ .
b: Caso em que γ é um círculo, dando a solução de Poisson (19) para o problema de Dirichlet.

sendo $r < a$; esta solução é frequentemente utilizada em ciências. Veja a Figura 10 b.

• **Problema de (Carl) Neumann:** dadas uma linha fechada γ , e uma função real f ao longo de γ , ache-se uma função harmônica h no interior de γ tal que $(\text{grad}h) \cdot \hat{n}$ (sendo \hat{n} a normal unitária exterior a γ) coincida com f em γ ; ocorre que essa h sempre existe, e que ela é única a menos de uma constante aditiva. Veja a Figura 11.

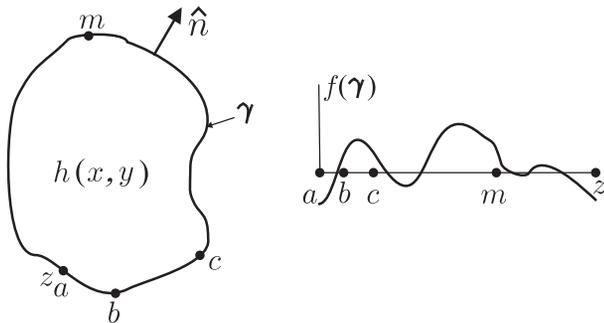


Figura 11: (Carl) Neumann: dado um contorno fechado γ e uma função real f em γ , há uma função harmônica $h(x,y)$ no interior de γ tal que $(\text{grad}h) \cdot \hat{n}$ tem os valores $f(\gamma)$ em γ ; \hat{n} é a normal unitária exterior a γ ; a função h é única, a menos de uma constante real aditiva qualquer.

Neste problema, novamente a teoria do calor nos ajuda a intuição. Se a função harmônica for a temperatura $T(x,y)$ estacionária no interior de γ (então $\Delta T = 0$), deverá ocorrer uma permanente troca estacionária de calor $f = \partial S / \partial l$ através de γ . Essa troca implica $\nabla T \cdot \hat{n}$ coincidir com f , como se queria mostrar [2, p. 419].

6. DUAL HARMÔNICA

Dada uma função harmônica $u(x,y)$, dizemos que uma função $v(x,y)$ é dual harmônica de $u(x,y)$ se forem satisfeitas as equações (ou condições) de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_{,x} = v_{,y} \\ u_{,y} = -v_{,x} \end{cases}; \tag{20}$$

se u estiver expressa em coordenadas polares, $u(r,\theta)$, suas duais harmônicas $v(r,\theta)$ serão obtidas por integração de

$$\begin{cases} v_{,\theta} = r u_{,r} \\ r v_{,r} = -u_{,\theta} \end{cases}. \tag{21}$$

Tais funções v são também harmônicas, e diferem entre si somente por constantes reais aditivas, geralmente irrelevantes para nossos propósitos. Pares $\{u,v\}$ serão importantes no nosso futuro estudo dos mapas conformes (Seção 8).

Perceba que se v for dual de u , então $-u$ (e não u) será dual de v .

As fórmulas (12) – (14) informam pares de funções harmônicas duais; assim, (12) informa que a dual de x é y , e a dual de $2xy$ é $-(x^2 - y^2)$; a (13) informa que a dual de $\ln \sqrt{x^2 + y^2}$ é $\tan^{-1}(y/x)$, e a (14) informa que a dual de x/r^2 é $-y/r^2$.

Se desenharmos no plano $\{x,y\}$ ambas famílias de linhas $u(x,y) = \text{const}$ e $v(x,y) = \text{const}$, as equações (20) imporão que elas sejam ortogonais. Ademais, como

$$\text{grad}u \equiv \begin{pmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \text{grad}v \equiv \begin{pmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{,y} \\ u_{,x} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

se vê que $\text{grad}v$ é $\text{grad}u$ rodado por ângulo $\pi/2$ no sentido esquerdo (positivo, anti-horário). Veja a Figura 12.

A (22) indica que podemos usar u e v como coordenadas localmente cartesianas. Em particular, um quadrilátero com vértices em $[u,v]$, $[u + \epsilon,v]$, $[u,v + \epsilon]$, $[u + \epsilon,v + \epsilon]$ é um quadrado, para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno; isto se percebe também na Figura 12.

Como na seção 4, visualizamos as funções u e v também como superfícies cujos pontos estejam às alturas variáveis u e v relativamente ao plano horizontal $\{x,y\}$. Assim, na superfície representante da função harmônica $u(x,y)$ as linhas de nível são (obviamente) $u = \text{const}$, e as linhas de maior declive têm v constante; ao passo que na superfície representante da função $v(x,y)$ as linhas de nível têm (obviamente) v constante, e as linhas de maior declive têm u constante.

Mas as condições (20) nos reservam uma surpresa: se marcarmos uma pequena área na superfície u e a girarmos por $\pi/2$ em torno da vertical, no sentido esquerdo (positivo, anti-horário), e a transladarmos verticalmente para a superfície v , veremos que ela se acomodará na superfície v sem dificuldade. Veja a Figura 13.

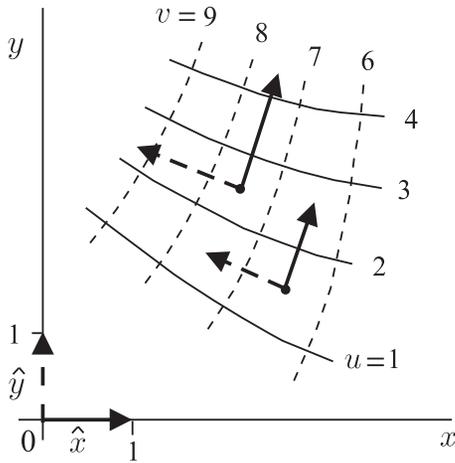


Figura 12: Uma função harmônica $u(x,y)$ e sua dual $v(x,y)$, dadas por linhas $u = \text{const}$ e $v = \text{const}$. Em cada ponto os vetores ∇u (em traço contínuo) e ∇v (em traço interrompido) são ortogonais, têm mesmo módulo, e têm orientação relativa como os vetores unitários $\hat{x} := \nabla x$ e $\hat{y} := \nabla y$, respectivamente.

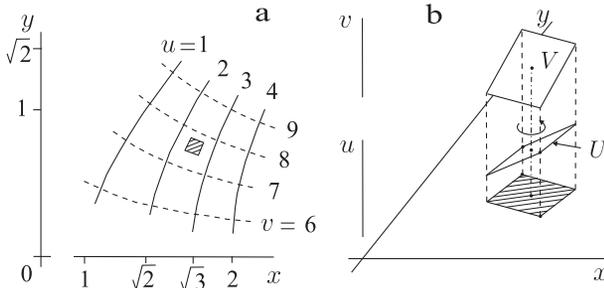


Figura 13: **a:** A função harmônica $u = x^2 - y^2$ e sua dual $v = 2xy + 5$, visualizadas mediante linhas $u = \text{const}$ e $v = \text{const}$. **b:** Esboço do pequeno quadrado hachurado em **a**, e de suas aparições retangulares U e V nas superfícies representantes de u e de v ; girando U por $\pi/2$ no sentido indicado e o transladando verticalmente, ele se confunde com V .

7. FUNÇÃO $f(x,y)$ COMPLEXA

Em um aberto \mathcal{R} do plano cartesiano $\{x,y\}$, seja a função complexa

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y); \quad (23)$$

aqui u e v são funções reais quaisquer, não necessariamente analíticas. Podemos considerar f como uma regra que associa a cada par ordenado $[x,y]$ de números reais outro par

ordenado $[u,v]$ de números reais. Equivalentemente, f associaria a cada número complexo $x + iy$ outro número complexo $u + iv$. Ou ainda, podemos ver a função f como um mapeamento: ela mapearia cada ponto pré-imagem $[x,y]$ de \mathcal{R} em um ponto imagem correspondente $[u,v]$ do plano w .

Se ambas funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ forem contínuas no aberto \mathcal{R} , teremos uma visualização muito simples para a função complexa $f(x,y)$: marcamos em \mathcal{R} as linhas $u(x,y) = \text{const}$ e $v(x,y) = \text{const}$, e as numeramos com os correspondentes valores das constantes. Veja a Figura 14 **a**.

Outra visualização de uma $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ contínua é como um par de superfícies cujos pontos estão nas alturas $u(x,y)$ e $v(x,y)$ no ponto $[x,y]$; iremos denominá-las superfícies u e v , respectivamente.

Ainda, podemos resolver o par de equações $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ em termos de u e v , obtendo as funções $x(u,v)$ e $y(u,v)$; se marcarmos as linhas $x(u,v) = \text{const}$ e $y(u,v) = \text{const}$ na região imagem de \mathcal{R} , no plano $[u,v]$, teremos mais uma visualização da função complexa $f(x,y)$. Veja a Figura 14 **b**.

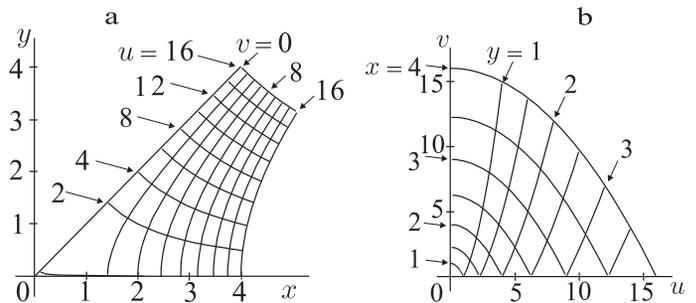


Figura 14: Ambas partes **a** e **b** referem-se à função $f(x,y) = xy + i(x^2 - y^2)$.

a: No plano $\{x,y\}$, algumas hipérbolas $u(x,y) = xy = \text{const}$ e $v(x,y) = x^2 - y^2 = \text{const}$.

b: No plano $\{u,v\}$, algumas parábolas $x(u,v) = \text{const}$ e $y(u,v) = \text{const}$.

Dentre as funções complexas contínuas de duas variáveis reais, $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, interessa-nos sobretudo a classe das funções complexas analíticas. Nestas, ambas funções reais $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são analíticas; isto é, todas as derivadas parciais de ambas, de todas as ordens, existem. *Mas atenção*: esta nossa definição de analiticidade de $f(x,y)$ complexa *conflita* com a maioria daquela dos outros autores.

Ainda, dentre as funções complexas analíticas, uma classe especial tem partes real $u(x,y)$ e imaginária $v(x,y)$ harmônicas; desta classe, uma subclasse muito especial é considerada na Seção a seguir.

8. FUNÇÃO $f(x,y)$ CONFORME

Dentre as funções complexas analíticas (isto é, aquelas $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ em que ambas u e v são analíticas, em nossa definição), uma classe muito restrita nos é de especial interesse, devido a suas múltiplas aplicações na matemática e na física: é a classe das funções complexas analíticas conformes, que denominaremos simplesmente por *funções conformes*. Nestas funções, $u(x,y)$ é harmônica, e $v(x,y)$ é sua dual harmônica. Relembrando (20), u e v então se relacionam do modo $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$.

Perceba que basta se ter 1 função harmônica real 2D para se construir uma função conforme. Mais precisamente, para se construir uma infinidade delas, diferindo umas das outras por constantes complexas, aditiva e/ou multiplicativamente.

Um esclarecimento antecipado: o que estamos chamando função conforme $f(x,y)$ é universalmente chamado *função analítica* $f(z)$; a justificação desta denominação alternativa será dada mais adiante nesta seção.

As funções $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ conformes em um aberto \mathcal{R} têm esse nome porque mapeiam os pontos $[x,y]$ da região \mathcal{R} no plano z em pontos $[u,v]$ num plano w de um modo especial: toda figura suficientemente pequena na região \mathcal{R} é mapeada em uma figura também pequena no plano w com a mesma forma, embora geralmente com outra orientação e outro tamanho. Veja a Figura 15.

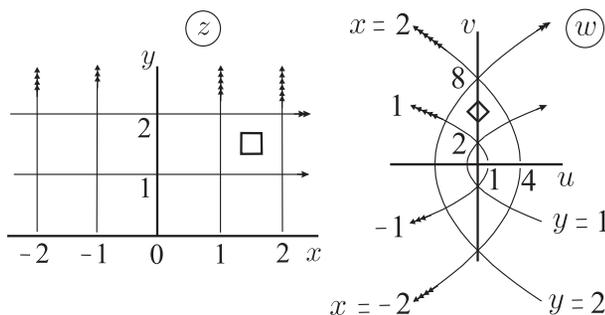


Figura 15: A função conforme $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2ixy$ mapeia pontos $[x,y]$ da região $y > 0$ do plano z em pontos $[u,v]$ do plano w . Um pequeno quadrado no plano z tem imagem também pequena e quadrada no plano w .

As $f(x,y)$ conformes sempre são expressáveis em termos da combinação $x + iy =: z$, exclusivamente (isto é, sem emprego do complexo conjugado $\bar{z} := x - iy$); por exemplo, $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2ixy$ é conforme, e pode ser escrita como $f(x,y) = (x + iy)^2$, que é $f(z) = z^2$. Tal peculiaridade não ocorre nas funções complexas analíticas não-conformes; por exemplo, $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2ixy$ é complexa, e é analítica segundo nossa definição (porque ambas funções $x^2 - y^2$ e $-2xy$ são analíticas), mas não é conforme, pois v não é dual

harmônica de u ; com efeito, substituindo $x \rightarrow (z + \bar{z})/2$ e $y \rightarrow (z - \bar{z})/(2i)$ na $f(x,y)$ se obtém $f = \bar{z}^2$.

A recíproca dessa peculiaridade é também verdadeira: dada uma qualquer expressão matemática $f(z)$ cuja única variável seja z , se substituirmos $z \rightarrow x + iy$ na $f(z)$ obteremos $f(x + iy)$, que separada nas partes real e imaginária, $f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, nos mostraria que u é harmônica e v é sua dual harmônica. Por exemplo, se $f(z) = \sinh z$ então $f(x + iy) = \sinh(x + iy) \equiv \sinh x \cos y + i \sin y \cosh x$, onde vemos que a parte real $\sinh x \cos y$ é harmônica e a parte imaginária $\sin y \cosh x$ é sua dual harmônica.

Dois novos adjetivos foram introduzidos na teoria das funções: uma função complexa $f(z)$ é dita *holomorfa* ($\sigma\lambda\omicron\zeta =$ todo, $\mu\omicron\rho\phi\eta =$ forma) numa região \mathcal{R} se puder ser expandida em série de potências na vizinhança de todo ponto a dessa região:

$$f(z) = f(a) + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + c_3(z - a)^3 + \dots \quad (24)$$

em que as constantes c_i são complexos finitos. A função é dita *inteira* se for holomorfa em todo o plano complexo finito. Percebe-se que holomorfismo (24) está para os complexos $f(z)$ assim como analiticidade regular (1) está para os reais $f(x)$.

Função *meromorfa* ($\mu\epsilon\rho\omicron\zeta =$ parte) numa região \mathcal{R} é aquela holomorfa em \mathcal{R} , exceto em pontos isolados que sejam *polos* da função (Seção 12). Então as funções meromorfas têm a forma racional $f(z)/g(z)$, em que ambas f e g são holomorfas.

Podemos finalmente esclarecer o motivo das funções $f(x,y)$ que estamos denominando conformes serem mais comumente chamadas funções $f(z)$ analíticas: o motivo é que elas têm as mesmas propriedades. Você pode então se perguntar a razão de este texto insistir em discernir os dois conceitos; é que ele prefere reservar o termo complexo analítico para funções complexas $f(x,y)$ ou $f(r,\theta)$ cujas partes real e imaginária sejam ambas apenas analíticas, sem necessidade de harmonidades e do relacionamento Cauchy-Riemann.

As funções $f(x,y)$ conformes são extremamente rígidas. Com efeito, se duas funções conformes em um mesmo aberto \mathcal{R} do plano $\{x,y\}$ têm os mesmos valores ao longo de um *arco* (*unidimensional!*) infinitesimal, então elas coincidirão em todo o \mathcal{R} [3, p.107].

Percebe-se a semelhança na forma das definições de analiticidade real (1) e complexa (24). E há outras semelhanças, como a notação empregada para derivadas e para integrais,

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ e } \frac{df(z)}{dz}, \quad \int f(x)dx \text{ e } \int f(z)dz. \quad (25)$$

Estas semelhanças tendem a mascarar algumas dissimilaridades que entretanto existem entre as analiticidades das funções analíticas $f(x)$ e $f(z)$. Com efeito, a operação $df(x)/dx$ implica uma variação de x , que só pode ocorrer na direção x , positiva ou negativa. Mas

a operação $df(z)/dz$ implica uma variação de z sem especificar-se a direção da variação dz no plano complexo, e no entanto espera-se que $df(z)/dz$ seja uma função de z , independentemente daquela direção. Como pode isso acontecer?

A resposta é que as funções $f(z)$ que satisfaçam essas derivações e integrações não são complexas analíticas quaisquer, elas são conformes. Para percebermos o modo como as condições de Cauchy-Riemann (20) resolvem a questão, substituimos $z \rightarrow x + iy$ na função complexa analítica $f(z)$, que separamos em suas componentes real e imaginária:

$$f(z) = f(x + iy) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y); \quad (26)$$

então

$$\frac{df}{dz} = \frac{d(u + iv)}{dx + idy} = \frac{(u_x + iv_x)dx + (u_y + iv_y)dy}{dx + idy}. \quad (27)$$

Se a variação de z for feita na direção x (então $dy = 0$), a (27) dará df/dz como na (28a); se porém a variação de z ocorrer na direção y (então $dx = 0$), a (27) dará df/dz como na (28b):

$$\frac{df}{dz} = u_x + iv_x, \quad \frac{df}{dz} = -iu_y + v_y; \quad (28)$$

vemos que estas duas expressões complexas para df/dz coincidirão se as condições de Cauchy-Riemann (20) forem obedecidas. Dito de outra forma, o conceito de derivada f' de uma função complexa $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ existe somente se u for harmônica e v for sua dual harmônica.

Os exemplos mais simples de funções conformes são os polinômios $P_n(z)$,

$$P_n(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n, \quad (29)$$

com c_k = números complexos finitos. Os polinômios são funções holomorfas, isto é, têm valores finitos em todo o plano complexo. Outros exemplos simples de funções conformes são as funções racionais, cocientes de dois polinômios,

$$R(z) = \frac{c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n}{d_0 + d_1z + d_2z^2 + \dots + d_mz^m}, \quad (30)$$

em que os c_i e os d_j são complexos finitos. As funções racionais são meromorfas, têm valores infinitos nos pontos em que o denominador se anule. Esses pontos são então chamados polos (Seção 12) da função $R(z)$.

O modo mais comum de se expressar uma função em uma região \mathcal{R} de não-singularidade é por uma série de Taylor

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k; \quad (31)$$

por exemplo, a função exponencial complexa e^z e as funções trigonométricas complexas $\sin z$ e $\cos z$ e as hiperbólicas $\sinh z$ e $\cosh z$ são definidas em termos de séries de Taylor, exatamente como suas congêneres reais.

8.1. Propriedades

Abaixo, algumas propriedades das funções conformes em um aberto \mathcal{R} :

- Toda combinação linear de funções conformes, com coeficientes complexos, é também função conforme.
- Produtos de funções conformes são também funções conformes.
- Se $f(x, y)$ for conforme, todas as derivadas parciais $(\partial/\partial x)^m (\partial/\partial y)^n f(x, y)$ também serão conformes.
- Se $f(z)$ for conforme, todas as derivadas $d^n f/(dz)^n$ também serão conformes.
- Se $f = u(x, y) + iv(x, y)$ for conforme, portanto $f = f(z)$, sua derivada $f' := df/dz$ poderá ser calculada do modo $f' = u_x + iv_x$, bem como do modo $f' = v_y - iu_y$.
- Se $f(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ for conforme, sua derivada pode ser calculada do modo $f' = (u_r + iv_r)/e^{i\theta}$, bem como do modo $f' = (v_\theta - iu_\theta)/(re^{i\theta})$.
- *Teorema do máximo módulo:* Numa região em que f for conforme (mas $f \neq \text{const}$), o ponto z_M em que o módulo $|f|$ é máximo sempre está na borda da região.
- *Teorema do mínimo módulo:* igual ao anterior, a menos que o mínimo $f(z_m)$ seja zero.
- *Preservação da harmonicidade:* a imagem de uma função harmônica, por um mapa conforme, é também harmônica.

9. INTEGRAIS NO PLANO COMPLEXO

Se uma linha orientada \mathcal{L} for escolhida em uma região do plano $\{x, y\}$, podemos integrar uma função complexa qualquer $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ ao longo da linha, resultando o número complexo

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} f(x, y)(dx + idy) &= \int_{\mathcal{L}} (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_{\mathcal{L}} (u dx - v dy) + i \int_{\mathcal{L}} (u dy + v dx). \end{aligned} \quad (32)$$

Alerte-se que não se trata do número também complexo $\int_{\mathcal{L}} f ds$, em que $ds := \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$.

Para funções $f(x, y)$ não-conformes, o valor da (32), assim como o de $\int_{\mathcal{L}} f ds$, geralmente depende da linha \mathcal{L} selecionada entre os pontos inicial e final. Por exemplo, para a função não-conforme $x - iy$ vejamos as integrais $\int_{\mathcal{L}} (x - iy)(dx + idy)$ para os caminhos $\mathcal{L} = \mathcal{A}$ e $\mathcal{L} = \mathcal{B}$ na figura 16.

Obtemos

$$\int_{\mathcal{A}} (x-iy)(dx+idy) = \int_0^a (x-0)(dx+0) \quad (33)$$

$$+ \int_0^b (a+iy)(0+idy) = (a^2+b^2)/2 + iab,$$

$$\int_{\mathcal{B}} (x-iy)(dx+idy) = \int_0^b (0-iy)(0+idy) \quad (34)$$

$$+ \int_0^a (x-ib)(dx+0) = (a^2+b^2)/2 - iab,$$

onde vemos que $\int_{\mathcal{A}} \neq \int_{\mathcal{B}}$. Opostamente, para funções $f(x,y)$ conformes obteríamos $\int_{\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{B}}$; por exemplo, para a função conforme $x+iy$ encontramos

$$\int_{\mathcal{A}} (x+iy)(dx+idy) = \int_0^a (x+0)(dx+0) \quad (35)$$

$$+ \int_0^b (a+iy)(0+idy) = (a^2-b^2)/2 + iab,$$

$$\int_{\mathcal{B}} (x+iy)(dx+idy) = \int_0^b (0+iy)(0+idy) \quad (36)$$

$$+ \int_0^a (x+ib)(dx+0) = (a^2-b^2)/2 + iab.$$

A propósito, como $x+iy=z$ e $dx+idy=dz$, confirmamos estes dois resultados do modo

$$\int_0^{a+ib} z dz = z^2/2 \Big|_{z=0}^{z=a+ib} = (a+ib)^2/2 \quad (37)$$

$$= (a^2-b^2)/2 + iab.$$



Figura 16: Uma função não-conforme integrada entre a origem e o ponto p dá valores diferentes conforme siga o caminho \mathcal{A} ou o \mathcal{B} . Uma função conforme dá o mesmo valor.

10. TEOREMA DE CAUCHY

O Teorema Fundamental das funções analíticas, ou Teorema da Integral de Cauchy, ou simplesmente Teorema de Cauchy, reza que: sendo $f(z)$ uma função holomorfa (isto é, sem singularidade) em uma região \mathcal{R} simplesmente conexa, e sendo a e b dois pontos da região, então o valor da integral

$$\int_a^b f(z) dz \quad (38)$$

não depende do caminho \mathcal{L} escolhido para a integração, desde que \mathcal{L} esteja todo contido em \mathcal{C} . Este foi o resultado encontrado em (35) e (36).

Este teorema implica a *Fórmula de Cauchy*: sendo γ um contorno fechado na região de holomorfismo, sem autointerseção, então os valores de f em γ determinam univocamente os valores de f em cada ponto z no interior de γ , do modo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\alpha)}{\alpha-z} d\alpha, \quad (39)$$

onde os α são pontos no contorno γ .

Prova: como $f(\alpha)$ é analítica, então também $f(\alpha)/(\alpha-z)$ a é. Deformamos γ até um pequenino círculo δ em torno de z , caso em que $f(\alpha)$ é constante e igual a $f(z)$. Fazendo $\alpha-z = \rho e^{i\theta}$, virá que $d\alpha = \rho i e^{i\theta} d\theta$, e portanto $\oint_{\delta} d\alpha/(\alpha-z) = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$.

Mas atenção: isso não implica que, ao se impor uma função complexa qualquer f_{γ} sobre um contorno fechado γ , exista uma função *holomorfa* no interior de γ , tal que coincida com f_{γ} sobre γ . Note-se o contraste deste fato com as soluções para o problema de Dirichlet nas funções (reais) harmônicas, em que qualquer função real imposta sobre um contorno fechado permite expansão *harmônica* para o interior.

11. SÉRIE DE POTÊNCIAS

Definimos polinômio de ordem n como a soma

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n, \quad (40)$$

sendo c_i números complexos finitos. Como o valor do polinômio é claramente finito para todo z finito, a (40) é uma função inteira.

E definimos série em z como a soma [1, p. 67]

$$S(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots, \quad (41)$$

onde os c_i são números complexos finitos. Como a série contém uma infinidade de termos, a questão de seu valor ser finito, ou não, precisa ser investigada. A série (41) converge para o valor $S(a)$ no ponto $z = a$ se a sequência de polinômios

$$P_m(a), P_{m+1}(a), P_{m+2}(a), \dots \quad (42)$$

progressivamente se aproximar de $S(a)$ para m suficientemente grande. Se tal não ocorrer, diz-se que (41) diverge em $z = a$, e então $S(a)$ não existe. Divergir quer dizer que ou $S(z)$ é indefinido em $z = a$ ou que ele vale $\pm\infty$.

A série (41) tem *convergência absoluta* em $z = a$ se a série *real*

$$\tilde{S}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} |c_j z^j| = |c_0| + |c_1 z| + |c_2 z^2| + \dots \quad (43)$$

convergir em $z = a$. Se tiver convergência absoluta, tem também convergência. Note que $\tilde{S}(z) \neq |S(z)|$. Se não ocorrer convergência absoluta, a busca da convergência prossegue.

Prova-se que se a série $S(z)$ converge em $z = a$, então converge também no disco aberto $|z| < |a|$ (não é \leq !). Prova-se também que se $S(z)$ diverge em $z = b$, então diverge também em $|z| > |b|$ (não é \geq !).

Fica-se inicialmente com o 'anel aberto de dúvida' $|a| < |z| < |b|$. Este anel pode ser encolhido passo-a-passo assim: escolhe-se um ponto médio z com $|z| = \frac{1}{2}(|a| + |b|)$ e averigua-se a convergência/divergência do $S(z)$ lá; com isso, a espessura do anel de dúvida fica encolhida à metade da espessura inicial; repete-se isso *ad nauseam*, e finalmente ficamos com um *disco de convergência* com raio $|z| = R$; ele separa a região de convergência $|z| < R$ da região de divergência $|z| > R$.

Há, porém, um modo muito mais rápido de se ter o raio R do círculo de convergência; ele é dado pelo *Teorema de Cauchy-Hadamard* [3, p. 87]

$$R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}; \quad (44)$$

relembremos que limite superior de um conjunto infinito de números reais em um intervalo finito é o ponto de acumulação de maior valor presente nesse intervalo. No caso, o conjunto infinito é o dos valores reais $\sqrt[n]{|c_n|}$ para valores de n cada vez maiores.

- Por exemplo, seja a série

$$S(z) = 1 + (z/2)^2 + (z/3)^3 + (z/2)^4 + (z/3)^5 + \dots; \quad (45)$$

neste caso, $c_2 = (1/2)^2$, $c_3 = (1/3)^3$, $c_4 = (1/2)^4$, ... , ou ainda, para $n \geq 1$, $c_{2n} = (1/2)^{2n}$ e $c_{2n+1} = (1/3)^{2n+1}$. Para os c_k com $k = \text{par}$ se tem o ponto de acumulação

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{|c_{2n}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{(1/2)^{2n}} = 1/2, \quad (46)$$

e para os c_k com $k = \text{ímpar}$ se tem outro ponto de acumulação,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{|c_{2n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{(1/3)^{2n+1}} = 1/3; \quad (47)$$

como $1/2 > 1/3$, o limite superior é $1/2$, portanto o raio de convergência de (45) é $R = 2$. •

Falta averiguar a convergência/divergência de uma série *sobre* o círculo de convergência $|z| = R$. Há três possibilidades, exemplificadas nos exemplos particulares de séries abaixo, nos quais R é unitário [1, p. 113]:

- 1) $S(z) = z + z^2/4 + z^3/9 + \dots$ converge em todo o círculo;
- 2) $S(z) = z + z^2/2 + z^3/3 + \dots$ converge se $z \neq 1$ porém explode em $z = 1$;
- 3) $S(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ diverge em todo o círculo; em particular, explode em $z = 1$.

12. SINGULARIDADES

É muito raro que uma função complexa seja analítica. Por isso, se uma função for analítica em uma região, exceto em alguns pontos dispersos, dizemos tratar-se de função analítica *com singularidades*. Tais 'novas' funções analíticas são muito úteis na Física, e serão também designadas simplesmente por funções analíticas.

Convém conhecermos o comportamento das funções analíticas na vizinhança de seus pontos de singularidade. Preliminarmente, relembremos que na vizinhança de um ponto a de não-singularidade (ou de regularidade) a função permite expansão em série de Taylor

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots, \quad (48)$$

sendo $c_k = \text{números complexos finitos}$. Em particular, $f(z)$ é finita nos pontos de regularidade. O cálculo dos coeficientes c_k será dado na (55).

Os pontos z em que $f(z)$ possa ser singular são classificados em 3 tipos: polos, singularidades essenciais, e pontos de ramificação [3, p. 149].

Polo: é um ponto $z = a$ em cuja vizinhança ocorre $f \rightarrow \infty$, portanto a função analítica f não pode ser expandida em série de Taylor (48); mas ela pode ser expandida em série de Laurent

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + (\text{Taylor (48)}), \quad 1 \leq n < \infty, \quad (49)$$

em que os coeficientes complexos c_{-k} são finitos. O cálculo desses coeficientes será dado na (56). No caso (49), sendo $c_{-n} \neq 0$, dizemos que a é um polo de ordem n para a $f(z)$. Notamos que embora $f(a)$ seja infinito, a quantidade $(z-a)^n f(z) = c_{-n}$ é finita quando $z \rightarrow a$. Qualquer que seja a ordem n do polo, o coeficiente complexo c_{-1} (denominado resíduo da função analítica f no ponto $z = a$) é de grande importância, como veremos na seção 13.

Singularidade essencial: é um ponto $z = a$ em cuja vizinhança a função analítica f vai a infinito, como se a fora polo; porém agora não há valor finito de k tal que $(z-a)^k f(z)$ seja finito quando $z \rightarrow a$. Dizer-se simplesmente que singularidade essencial é polo de ordem infinita não faria justiça ao extraordinário comportamento da função na vizinhança de uma singularidade essencial [2, p. 511].

Um exemplo muito popular de singularidade essencial ocorre em $z = 0$ para a função analítica $f(z) = e^{1/z}$; a infinitude de f conforme nos aproximamos de $z = 0$ por um caminho na região $x > 0$ não é removida (anulada) pela multiplicação por nenhuma potência z^k com k finito; tal fato indica não se tratar de polo.

Mas a função $f(z) = e^{1/z}$ nos reserva surpresas: se nos aproximarmos de $z = 0$ ao longo do eixo y , em qualquer dos

sentidos, encontramos sempre $|f| = 1$; e se nos aproximarmos de $z = 0$ por um caminho na região $x < 0$, veremos que $|f|$ diminui até zero.

Picard demonstrou que toda função analítica tem um comportamento semelhante ao descrito acima, na vizinhança de uma singularidade essencial. Mostrou também que todos os valores complexos (inclusive os reais e os imaginários puros) de $f(z)$ ocorrem nessa vizinhança, mesmo bem pequena; ainda, todos esses valores, exceto um (ou dois, em casos bem especiais), ocorrem infinitas vezes.

Ponto de ramificação: Consideremos $f(z) = z^{1/3}$; como a derivada $f' = (1/3)z^{-2/3}$ é infinita em $z = 0$, este ponto é de singularidade para $z^{1/3}$. Mas esta singularidade não é um polo, de vez que não se pode descrevê-la via uma expansão de Laurent (49), e claramente tampouco é singularidade essencial. Escolhamos a forma polar $z = re^{i\theta}$ para melhor apreciarmos esta singularidade. Em um ponto $z_0 = [r_0, \theta_0]$ com $0 \leq \theta_0 < 2\pi$, temos $z^{1/3}$ com o bem-definido valor $\alpha := \sqrt[3]{r_0} e^{i\theta_0/3}$. Se partirmos de z_0 e percorrermos um lacete simples que não contorne o ponto $z = 0$, e progressivamente coletarmos os valores de $z^{1/3}$ com variação contínua, reencontraremos o valor α no retorno a z_0 . Se porém o lacete simples contornar o ponto $r = 0$, no sentido positivo, encontraremos no retorno a z_0 o valor $\alpha e^{i2\pi/3}$, que difere do valor α inicial; com mais uma volta, encontraremos $\alpha e^{i4\pi/3}$, diferente dos dois anteriores (α e $\alpha e^{i2\pi/3}$); somente completando uma terceira volta reencontraremos o valor α inicial. Como um mesmo valor de z permite mais que 1 valor de $z^{1/3}$, não podemos dizer que $z^{1/3}$ é uma função; dizemos tratar-se de uma *multifunção*. E dizemos que $z = 0$ é *ponto de ramificação* para a multifunção analítica $z^{1/3}$, e que o plano $\{x, y\}$ se replica em 3 *folhas* para exibir essa multifunção. A passagem de uma folha para outra se faz através de uma *linha* (ou *corte*) de ramificação que parte de $z = 0$. Um tal arranjo de réplicas do plano z , costuradas ao longo dos cortes, é denominado *superfície de Riemann* da multifunção.

Outro exemplo de multifunção analítica é $\log z = \log r + i(\theta + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Ela tem ponto de ramificação $r = 0$ e usa uma infinidade de réplicas do plano $\{x, y\}$; o corte de ramificação geralmente é tomado no semieixo x positivo, quando então a folha $k = 0$ é denominada folha principal.

13. RESÍDUO

Consideremos a função $f(z) = 1/z$; ela é meromorfa com uma única singularidade, um polo de ordem 1 em $z = 0$. Vamos calcular $\oint_{\gamma} z^{-1} dz$, sendo γ o círculo unitário centrado na origem; então $z = e^{i\theta}$ e $dz = ie^{i\theta} d\theta$, e portanto

$$\oint_{\gamma} z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} (e^{-i\theta})(ie^{i\theta} d\theta) = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i. \quad (50)$$

Note-se que qualquer outra potência inteira de z , positiva ou negativa, dá resultado nulo:

$$\oint_{\gamma} z^n dz = 0, \quad n \neq -1. \quad (51)$$

Seja agora $f(z)$ meromorfa com polo em $z = a$, expresso como na série de Laurent (49); os resultados (50) e (51) indicam que

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i c_{-1}, \quad (52)$$

em que γ é um lacete simples envolvendo o polo $z = a$ e nenhuma outra singularidade. O coeficiente c_{-1} é chamado resíduo da função $f(z)$ no polo $z = a$.

A (52) é válida também para singularidades essenciais. Por exemplo, $e^{1/z}$ tem singularidade essencial em $z = 0$, e sua expansão em série (a rigor, válida só para $|z| > 1$)

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \quad (53)$$

dá resíduo $c_{-1} = 1$. Com efeito, um cálculo numérico dá

$$\oint_{\gamma} e^{1/z} dz = 2\pi i, \quad (54)$$

sendo γ um círculo unitário com centro em $z = 0$.

Os resultados (50) e (51) nos permitem obter também os coeficientes c_k da série de Taylor (48):

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (55)$$

onde γ é um lacete simples envolvendo o ponto a e nenhuma outra singularidade; perceba-se que somente o termo $c_k(z-a)^k$ da (48) contribui para a integral.

Igualmente, os coeficientes c_{-k} da série de Laurent (49) são obtidos como

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (z-a)^{k-1} f(z) dz, \quad k = n, n-1, \dots, 1, \quad (56)$$

onde γ é um lacete simples envolvendo o ponto a , e nenhuma outra singularidade; note-se que somente o termo $c_{-k}/(z-a)^k$ da (49) contribui para a integral. Certamente a (55) e a (56) podem ser juntadas em uma só equação, mas não o foram para facilitar a compreensão.

14. $c \iff \vec{c}$

É bem conhecida a correspondência entre um número complexo c e um vetor 2D real \vec{c} :

$$c = c_x + ic_y \iff \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}; \quad (57)$$

embora essa correspondência nos permitisse abolir as setas indicativas nos vetores, nós as manteremos para facilitar a compreensão. Definimos também o vetor 2D real \vec{c} a partir de \bar{c} , o complexo conjugado de c :

$$\bar{c} = c_x - ic_y \iff \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ -c_y \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Você certamente sabe que o produto escalar de dois vetores reais é um número real:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y; \quad (59)$$

mas talvez nunca tenha percebido que também o 'produto vetorial em 2D' é um número real:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_y - a_y b_x. \quad (60)$$

Combinações de (57) – (60) produzem um interessante resultado: poderemos exprimir o produto de dois números complexos,

$$\begin{aligned} ab &= (a_x + ia_y)(b_x + ib_y) \\ &= (a_x b_x - a_y b_y) + i(a_x b_y + a_y b_x), \end{aligned} \quad (61)$$

como somas de produtos escalar e vetorial:

$$ab = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{a} \times \vec{b} \text{ bem como } ab = \vec{a} \cdot \vec{b} - i\vec{a} \times \vec{b}; \quad (62)$$

em ambas (62) nós vemos que a parte real do produto ab é expressa por produtos escalares, enquanto a parte imaginária usa produtos vetoriais.

Notamos as igualdades entre módulos de vetores reais e módulos de números complexos:

$$|\vec{c}| = |\bar{c}| = |c| = |\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}. \quad (63)$$

Para uso futuro: no plano cartesiano $\{x, y\}$, considere uma linha orientada; em cada ponto dessa linha nós definimos o vetor tangente unitário \hat{T} e o vetor normal unitário \hat{N} , relacionados como $\hat{T} = i\hat{N}$; aqui i indica rotação de $\pi/2$ à esquerda (anti-horária, positiva). Com esta convenção, para qualquer vetor \vec{v} em qualquer ponto da linha ocorrem (veja a Figura 17)

$$\vec{v} \cdot \hat{N} = \vec{v} \times \hat{T}, \quad \vec{v} \cdot \hat{T} = -\vec{v} \times \hat{N}. \quad (64)$$

15. FLUIDOS BIDIMENSIONAIS

Relembremos que os campos de velocidade $\vec{v}(x, y)$ estacionária irrotacional de fluidos incompressíveis em regiões sem fontes difusas ou sumidouros difusos têm equações

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \quad \text{e} \quad \text{div } \vec{v} = 0; \quad (65)$$

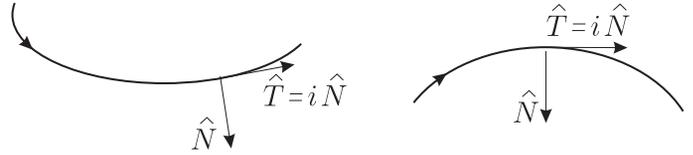


Figura 17: Posicionamento relativo dos vetores unitários \hat{T} e \hat{N} .

de aqui em diante designaremos fontes e sumidouros simplesmente como *fontes* – os sumidouros seriam como fontes negativas. Ora, tendo uma função conforme $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ nós definimos os campos vetoriais bidimensionais reais

$$\vec{U}(x, y) := \text{grad } u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{V}(x, y) := \text{grad } v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Ambos campos são irrotacionais, $\text{rot } \vec{U} := \partial_x u_y - \partial_y u_x \equiv 0$ e $\text{rot } \vec{V} := \partial_x v_y - \partial_y v_x \equiv 0$, e a harmonicidade de u e v implicam terem divergência nula, ambos: $\text{div } \vec{U} := \partial_x u_x + \partial_y u_y = 0$ e $\text{div } \vec{V} := \partial_x v_x + \partial_y v_y = 0$. Portanto ambos campos \vec{U} e \vec{V} podem representar velocidade irrotacional de fluidos bidimensionais incompressíveis sem fontes difusas.

Ainda, as condições de Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ implicam a igualdade dos módulos dos campos em cada ponto $[x, y]$,

$$|\vec{U}(x, y)| = |\vec{V}(x, y)|, \quad (67)$$

como já anunciado em (22).

A função harmônica $u(x, y)$ é chamada *potencial* do campo de velocidades $\vec{U}(x, y)$; as linhas $u(x, y) = \text{const}$ são chamadas *equipotenciais* de \vec{U} , e são as linhas de campo da velocidade \vec{V} . Igualmente, a função harmônica $v(x, y)$ é chamada *potencial* do campo de velocidades $\vec{V}(x, y)$, e as linhas $v(x, y) = \text{const}$ são chamadas *equipotenciais* de \vec{V} e são as linhas de campo das velocidades \vec{U} .

15.1. Exemplo 1

Como exemplo simples, seja $f(z) = z$, ou $f(x, y) = x + iy$. Então $u = x$ e $v = y$. Os campos vetoriais correspondentes serão $\vec{U} = \text{grad } u = \hat{x}$ e $\vec{V} = \text{grad } v = \hat{y}$. As linhas $x = \text{const}$ são as equipotenciais do campo vetorial \vec{U} e são as linhas de campo de \vec{V} ; e as linhas $y = \text{const}$ são as equipotenciais do campo vetorial \vec{V} e são as linhas de campo de \vec{U} . Ambos campos têm intensidade unitária, $|\vec{U}| = |\vec{V}| = 1$.

O campo vetorial \vec{U} pode representar uma corrente d'água estacionária com velocidades de valor unitário na direção \hat{x} ; as equipotenciais do campo \vec{U} claramente são as linhas verticais $u = \text{const}$.

15.2. Exemplo 2

Outro exemplo simples é $f(z) = 1/z = (x - iy)/(x^2 + y^2)$, que dá $u = x/(x^2 + y^2) = \text{const}$ como as linhas de campo do campo vetorial $\vec{V} = \text{grad}v$, e dá $v = -y/(x^2 + y^2) = \text{const}$ como as linhas de campo do campo vetorial $\vec{U} = \text{grad}u$. Os módulos dos dois campos são $|\vec{U}| = |\vec{V}| = r^{-2}$. Veja a Figura 18.

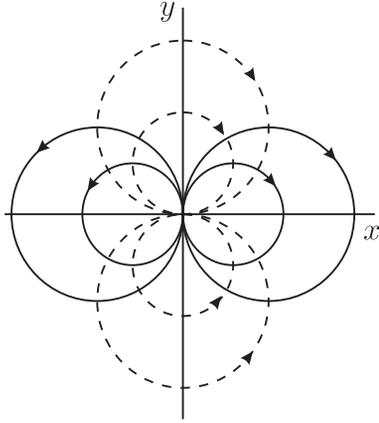


Figura 18: Refere-se à função analítica $f(z) = 1/z$. Os círculos com linhas contínuas têm $u = \text{const}$, e indicam a orientação local do campo \vec{V} ; e os círculos com linhas interrompidas têm $v = \text{const}$, e indicam a orientação local do campo \vec{U} . Cada campo seria o campo elétrico associado a uma reta de dipolos elétricos, orientada na direção \hat{z} .

15.3. Exemplo 3

Este exemplo combina os dois anteriores: seja $f(z) = z + 1/z$, que dá linhas de campo do campo vetorial \vec{U} como $v(x, y) = y - y/(x^2 + y^2) = \text{const}$. Veja essas linhas na Figura 19.

16. O OPERADOR ∇ COMPLEXO

Para evitar ambiguidades, vamos denotar como grad , div e rot os operadores diferenciais conhecidos nas funções e vetores reais bidimensionais; assim,

$$\begin{aligned} \text{grad} \phi &:= \begin{pmatrix} \partial_x \phi \\ \partial_y \phi \end{pmatrix}, & \text{div} \vec{v} &:= \partial_x v_x + \partial_y v_y, & (68) \\ \text{rot} \vec{v} &:= \partial_x v_y - \partial_y v_x, \end{aligned}$$

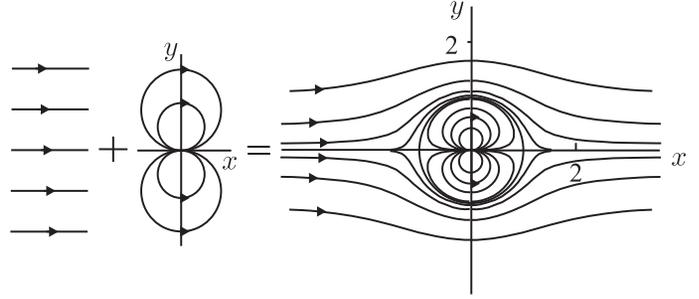


Figura 19: Superposição de um campo vetorial uniforme \hat{x} vindo de $f(z) = z$ a um campo dipolar vindo de $f(z) = 1/z$; na superposição, percebe-se um círculo de raio unitário separando as regiões de predomínio de um ou outro campo.

sendo ϕ , v_x e v_y funções reais. Repare-se que não somente $\text{div} \vec{v}$ é um campo escalar real em 2D, mas também $\text{rot} \vec{v}$ o é.

Como o campo vetorial 2D real $\text{grad} \phi$ pode ser manipulado como uma função complexa $\partial_x \phi + i \partial_y \phi$, nós somos tentados a definir o operador *nabla complexo* ∇ , e o operador *nabla complexo conjugado* $\bar{\nabla}$,

$$\nabla := \partial_x + i \partial_y, \quad \bar{\nabla} := \partial_x - i \partial_y, \quad (69)$$

e os correspondentes operadores vetoriais reais

$$\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}, \quad \vec{\bar{\nabla}} := \begin{pmatrix} \partial_x \\ -\partial_y \end{pmatrix}; \quad (70)$$

note-se que $\vec{\nabla} \phi$ coincide com $\text{grad} \phi$ para $\phi(x, y)$ real.

Sendo $f = u + iv$ uma função complexa analítica ou não, ocorrem

$$\nabla f = \nabla u + i \nabla v = \nabla u + (\nabla v \text{ rodada } \pi/2); \quad (71)$$

repare-se que embora u e v sejam funções reais, ∇u e ∇v são funções complexas (ou, equivalentemente, campos vetoriais reais). Ocorre

$$\begin{aligned} \nabla f &= (\partial_x + i \partial_y)(u + iv) = (\partial_x u - \partial_y v) + i(\partial_x v + \partial_y u) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla f = \text{div} \vec{f} - i \text{rot} \vec{f}; \quad (72)$$

correspondentemente, $\bar{\nabla} f = \text{div} \vec{f} + i \text{rot} \vec{f}$.

O operador ∇ tem várias propriedades análogas às das derivadas usuais:

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g, \quad \nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f; \quad (73)$$

note-se ainda o laplaciano $\nabla\bar{\nabla} = \Delta = \bar{\nabla}\nabla$.

Relembremos que, quando $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ for analítica, o correspondente vetor real $\vec{f} = u\hat{x} + v\hat{y}$ terá $\text{div}\vec{f} = u_x + v_y$, e $\text{rot}\vec{f} = v_x - u_y$, não-nulos em geral. Mas o vetor associado à função complexo conjugada, $\bar{f} = u(x, y) - iv(x, y)$, que é o vetor real $\vec{\bar{f}} = u\hat{x} - v\hat{y}$, tem $\text{div}\vec{\bar{f}} = u_x - v_y$, e $\text{rot}\vec{\bar{f}} = -v_x - u_y$, ambos nulos pelas condições CR. Assim, se f for analítica, e portanto ocorrerem $\text{div}\vec{f} = 0$ e $\text{rot}\vec{f} = 0$, então as (72) darão

$$\nabla f = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\nabla} f = 2f'. \quad (74)$$

A equação (74a) é uma formulação bem elegante para analiticidade. Essa analiticidade não implica as funções complexas ∇u e ∇v serem nulas, e sim implica $\nabla v = i\nabla u$. Sendo f analítica, então também suas derivadas o são, e portanto todos os gradientes complexos $\nabla f', \nabla f'' \dots$ são também nulos. E também $\bar{\nabla} f' = 2f''$, $\bar{\nabla} f'' = 2f''' \dots$. E ainda, para f analítico,

$$\nabla f[g(x, y)] = [df(g)/dg]\nabla g(x, y); \quad (75)$$

a analiticidade de f é aqui exigida a fim de que exista a derivada df/dg ; entretanto, analiticidade de $g(x, y)$ não é exigida para fins de (75).

17. SINGULARIDADES NO INFINITO

É possível e muito interessante, estudar-se o comportamento de uma função complexa analítica no infinito do plano complexo. Para tanto, primeiramente estendemos (ou fechamos) o plano complexo adicionando-lhe o ponto no infinito z_∞ . Em seguida associamos a cada ponto finito z o ponto $t = 1/z$ e criamos a função analítica $g(t) := f(1/z)$. Por exemplo, se $f(z) = 2z^2 + \sin z^{-1}$, teríamos $g(t) = 2/t^2 + \sin t$. Diremos que $f(z)$ é analítica em z_∞ se $g(t)$ for analítica em $t = 0$; e diremos que $f(z)$ tem certo tipo de singularidade em z_∞ se $g(t)$ tiver aquele tipo em $t = 0$. Então as singularidades de $f(z)$ em z_∞ podem ser polos, singularidades essenciais, e pontos de ramificação.

Vejamos primeiro um caso de função $f(z)$ sem singularidade em z_∞ : como o polinômio $g(t) := c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots + c_nt^n$ é regular em $t = 0$, também o polinômio em $1/z$

$$f(z) := c_0 + c_1/z + c_2/z^2 + \dots + c_n/z^n \quad (76)$$

é regular em z_∞ .

Agora vejamos o caso em que $g(t)$ é uma série. Se a série

$$g(t) := c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_nt^n \quad (77)$$

for analítica em $t = 0$, então ela será convergente para t dentro de um círculo suficientemente pequeno com centro em $t = 0$. Em consequência, a série

$$f(z) := c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} \quad (78)$$

será convergente para z fora de um círculo suficientemente grande com centro em $z = 0$; e a função $f(z)$ será analítica em z_∞ , onde se terá $f(z_\infty) = c_0$. Note-se que $zf(z)$ divergirá em z_∞ , mas $z^2df(z)/dz$ 'existirá' em z_∞ , valendo o negativo do resíduo c_1 .

Vamos agora ver um exemplo de função $f(z)$ com polo em z_∞ : como

$$g(t) := c_0 + c_1/t + c_2/t^2 + \dots + c_m/t^m \quad (79)$$

tem polo de ordem m em $t = 0$, então o polinômio

$$f(z) := c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_mz^m \quad (80)$$

tem polo de ordem m em z_∞ . Tem também m zeros na região finita, incluindo as possíveis multiplicidades.

Essa igualdade de quantidade de polos e zeros (todos contados com multiplicidades) ocorre também nas funções racionais

$$f(z) := \frac{c_0 + c_1z + \dots + c_mz^m}{d_0 + d_1z + \dots + d_nz^n}; \quad (81)$$

com efeito, $f(z)$ sempre tem m zeros e n polos na região com z finito; se $m > n$ então ocorrerão $m - n$ polos adicionais em z_∞ , dando um total de m polos e m zeros no plano complexo estendido; se porém $n > m$ então ocorrerão $n - m$ zeros adicionais em z_∞ , dando um total de n polos e n zeros. Em ambos casos, portanto, a quantidade de polos iguala a quantidade de zeros (sempre contados com as multiplicidades) no plano complexo estendido.

A constatação de que as quantidades de polos e zeros de uma função analítica é igual nos indica que as funções $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ e $\cosh z$ todas têm uma singularidade essencial em z_∞ . Isso porque há uma quantidade infinita de zeros na região finita, e nenhum polo nessa região; essa infinidade deve ser compensada por uma infinidade de polos em z_∞ , ou seja, um polo de ordem infinita (uma singularidade essencial).

Também e^z tem singularidade essencial em z_∞ , de vez que $e^{1/z}$ a tem em $z = 0$.

Para completar, vejamos dois exemplos de funções com ponto de ramificação em z_∞ . O primeiro exemplo é $f(z) = z^k$, com k não-inteiro; de fato, como $(1/z)^k = z^{-k}$ tem ponto de ramificação em $z = 0$, então z^k o tem em z_∞ . O outro exemplo é $f(z) = \log z$: como $\log(1/z) = -\log z$ tem ponto de ramificação em $z = 0$, então $\log z$ o tem em z_∞ .

Apêndice A: Analiticidade de $f(x)$

Seja a função $f(x)$ real analítica num intervalo aberto \mathcal{R} da reta real. Sejam dados os valores de $f(x)$ num ponto $a \in \mathcal{R}$ e nos seus vizinhos imediatos $a \mp \varepsilon$, $a \mp 2\varepsilon$, $a \mp 3\varepsilon$, ..., em que ε é infinitesimal. Ou seja, sejam-nos dados a conhecer os números reais $f(a)$, $f(a \mp \varepsilon)$, $f(a \mp 2\varepsilon)$, $f(a \mp 3\varepsilon)$, ... Com esses valores, em quantidade infinita, enfatize-se, vamos conhecer $f(x)$ em toda a região \mathcal{R} mediante a expansão de Taylor eq. (2).

Por definição, as sucessivas derivadas da função em a são

$$f'(a) = \frac{f(a+\varepsilon) - f(a-\varepsilon)}{2\varepsilon}, \quad f''(a) = \frac{f'(a+\varepsilon) - f'(a-\varepsilon)}{2\varepsilon}, \quad (82)$$

$$f'''(a) = \frac{f''(a+\varepsilon) - f''(a-\varepsilon)}{2\varepsilon}, \dots$$

A derivada primeira $f'(a)$, exposta na (82a), está pronta para ser usada na (2), pois contém somente $f(a \mp \varepsilon)$, ambos conhecidos. Mas a derivada segunda $f''(a)$, exposta na (82b), requer os valores ainda desconhecidos das derivadas primeiras em $a + \varepsilon$ e $a - \varepsilon$. Estes são

$$f'(a + \varepsilon) = \frac{f(a + 2\varepsilon) - f(a)}{2\varepsilon} \quad (83)$$

e

$$f'(a - \varepsilon) = \frac{f(a) - f(a - 2\varepsilon)}{2\varepsilon},$$

portanto a (82b) agora se escreve

$$f''(a) = \frac{f(a + 2\varepsilon) - 2f(a) + f(a - 2\varepsilon)}{4\varepsilon^2}, \quad (84)$$

pronto para uso na (2). Procedendo analogamente para obtenção de $f'''(a)$, encontramos

$$f'''(a) = \frac{f(a + 3\varepsilon) - 3f(a + \varepsilon) + 3f(a - \varepsilon) - f(a - 3\varepsilon)}{8\varepsilon^3}, \quad (85)$$

onde reconhecemos os coeficientes binomiais $[1, -3, 3, -1]$ da expansão de $(1 - \chi)^3$. Comparando a sequência $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$ percebemos o modo como rapidamente obter todas as demais derivadas $f^{(4)}(a)$, $f^{(5)}(a)$, ... necessárias para uso na (2). Este procedimento evidencia que efetivamente o conhecimento dos valores de uma função analítica $f(x)$ na vizinhança infinitesimal de um ponto de acumulação é suficiente para se obter os valores em toda a região de analiticidade da função.

Apêndice B: Hiperbolicidade

O elemento de linha da superfície dada por $z = f(x, y)$ é

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \quad (86)$$

com $dz = f_x dx + f_y dy$;

e a curvatura gaussiana da superfície é

$$C_G = \frac{f_{,xx}f_{,yy} - (f_{,xy})^2}{[1 + (f_{,x})^2 + (f_{,y})^2]^2}. \quad (87)$$

Como nas funções harmônicas ocorre $f_{,yy} = -f_{,xx}$, nelas ocorre $C_G = 0$ somente se $f_{,xx} = f_{,xy} = 0$, que implica linearidade de f em ambos x e y ; e ocorre $C_G < 0$ nos casos de f não-linear.

Apêndice C: Dirichlet retângulo

No plano $[x, y]$ considere o retângulo de lados L e H , como na Figura 20. Uma função harmônica $h(x, y)$ existe no retângulo, com valores 0 nos lados $x = 0, y = 0, x = L$, e com valores reais $f(x)$ ao longo do lado $y = H$. Segundo o teorema de Dirichlet, a função harmônica é única, e quer-se saber como ela é.

Tentamos (e seremos bem sucedidos) uma solução com separação de variáveis

$$h(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x, y), \quad h_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y), \quad (88)$$

onde cada $h_n(x, y)$ é função harmônica; após algum algebrismo simples envolvendo os valores de $h(x, y)$ nas bordas obtemos [2, p.421]

$$h(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x/L) \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi H/L)}, \quad (89)$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx.$$

A Figura 20 dá algumas curvas $h(x, y) = \text{const}$ para o particular caso (89) quadrado $L = H = 1$ com $f = \text{const} = 1$, caso em que $c_n = 0$ para n par e $c_n = 4/(n\pi)$ para n ímpar.

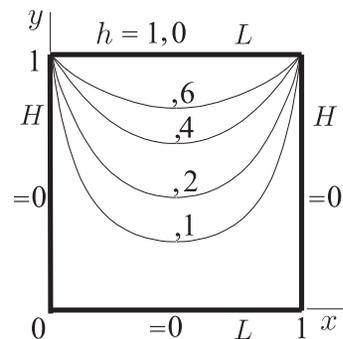


Figura 20: Função harmônica (89) no interior do quadrado, com $f = \text{const} = 1$; algumas linhas com $h(x, y) = \text{const}$ estão assinaladas.

Apêndice D: Dirichlet anel

Em um círculo com raio r_1 , centrado em $r = 0$, é colocada uma função real $f_1(\varphi)$; em outro círculo, concêntrico, com raio $r_2 > r_1$, é colocada outra função real $f_2(\varphi)$; no anel entre os círculos há uma função harmônica $h(r, \varphi)$ com valores

$f_1(\varphi)$ e $f_2(\varphi)$ nos círculos. Quer-se essa função, que é única. Tentamos a decomposição

$$h(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r) \Phi_n(\varphi), \quad (90)$$

e impomos $\Delta[R_n(r)\Phi_n(\varphi)] = 0$, encontrando [2, p.425]

$$h(r, \varphi) = (a_0 + b_0 \log r) \quad (91)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi],$$

na região $r_1 \leq r \leq r_2$. As constantes $a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n$ ($n = 1, 2, \dots$) são obtidas, aos pares, de

$$a_0 + b_0 \log r_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi, \quad (92)$$

$$a_0 + b_0 \log r_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) d\varphi,$$

$$a_n r_1^n + b_n r_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad (93)$$

$$a_n r_2^n + b_n r_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \cos n\varphi d\varphi,$$

$$c_n r_1^n + d_n r_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad (94)$$

$$c_n r_2^n + d_n r_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Vamos estudar o caso especial $f_1(\varphi) = \cos \varphi$ e $f_2(\varphi) = \sin \varphi$. Então as (92) dão $a_0 = b_0 = 0$. E como

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos n\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi \sin n\varphi d\varphi = \pi \delta_n^1 \quad (95)$$

$$\text{e } \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos n\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin n\varphi d\varphi = 0, \quad (96)$$

obtemos como únicos coeficientes não-nulos os seguintes:

$$a_1 = -1/3, \quad b_1 = 4/3, \quad c_1 = 2/3, \quad d_1 = -2/3. \quad (97)$$

A função harmônica buscada é então

$$h(r, \varphi) = \frac{1}{3} \left[r(2 \sin \varphi - \cos \varphi) + \frac{2}{r}(2 \cos \varphi - \sin \varphi) \right]. \quad (98)$$

A Figura 21 mostra algumas linhas $h(r, \varphi) = \text{const}$ para esta função no espaço entre r_1 e r_2 .

Apêndice E: Dirichlet disco

Tome-se $r_1 = 0$ no anterior, que transformará o anel em um disco com raio r_2 , centrado em $r = 0$. As equações (92) –

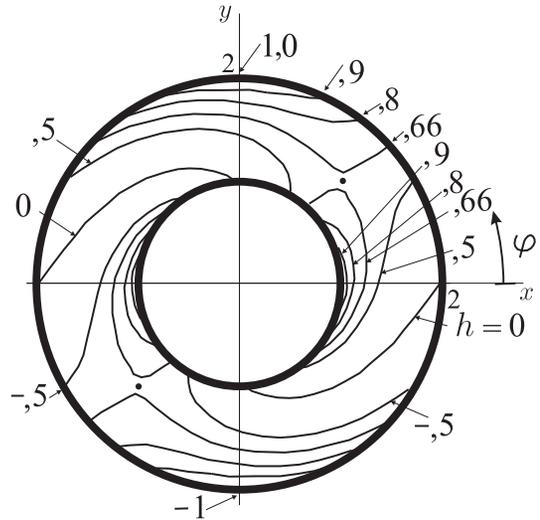


Figura 21: Alguns valores constantes da função harmônica (98) entre os raios $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$, sendo $f_1(\varphi) = \cos \varphi$ e $f_2(\varphi) = \sin \varphi$. Note o estranho comportamento da função harmônica $h(r, \varphi)$ na vizinhança do ponto $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$, quando $h = 2/3$, e também na vizinhança do ponto $r = \sqrt{2}$, $\varphi = 5\pi/4$, quando $h = -2/3$.

(94) então exigem $b_0 = b_n = d_n = 0$ para $n = 1, 2, \dots$ para serem finitas. Daí, em $r \leq r_2$ [2, p.426],

$$h(r, \varphi) = h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_2} \right)^n [A_n \cos n\varphi + C_n \sin n\varphi] \quad (99)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad (100)$$

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Note-se que h_0 é o valor de h no centro $r = 0$ do disco, e é a média de h na borda do disco. Adiante veremos que Poisson simplificou muito esse resultado.

Se escolhermos $f_2(\varphi) = \sin \varphi$, então $A_n = 0$ e $C_n = \delta_n^1$, o que dá a função harmônica $h(r, \varphi) = (r/r_2) \sin \varphi$, ou $h = y/r_2$, no disco.

Apêndice F: Dirichlet fora de círculo

Tome-se $r_2 = \infty$ no Dirichlet anel, o que impõe $b_0 = a_n = c_n = 0$ para $n = 1, 2, \dots$. Daí, em $r \geq r_1$ e para $n = 1, 2, \dots$,

$$h(r, \varphi) = h_{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r} \right)^n [B_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi], \quad (101)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad (102)$$

$$D_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Note-se que h_∞ , o valor de h no infinito, é a média de h no círculo $r = r_1$.

Se escolhermos $f_1(\varphi) = \sin \varphi$ então $B_n = 0$ e $D_n = \delta_n^1$ o que dá a função harmônica $h(r, \varphi) = h_\infty + (r_1/r) \sin \varphi$, com valor h_∞ no infinito. Veja a Figura 22.

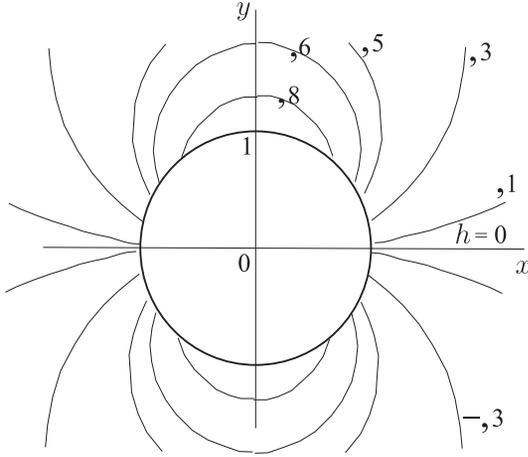


Figura 22: Alguns valores constantes da função harmônica $h(r, \varphi) = (1/r) \sin \varphi$ fora do disco unitário, com valores $\sin \varphi$ na borda do disco.

Apêndice G: Integral de Poisson

Metendo-se as (100) na (99) e reordenando fica-se com

$$h(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos n(\varphi - \theta) \right] d\varphi; \quad (103)$$

mas a soma é

$$\Re \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} e^{i(\varphi-\theta)} \right)^n \right] = \Re \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a} e^{i(\varphi-\theta)} \right)^n \right] - 1 \quad (104)$$

$$= \Re \left[\frac{1}{1 - \frac{r}{a} e^{i(\varphi-\theta)}} \right] - 1,$$

e com isso a (103) fica

$$h(r, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{a^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi, \quad (105)$$

para $r \leq a$. Essa seria a temperatura no ponto $[r, \theta]$ se no círculo ela fosse mantida $f(\varphi)$ permanentemente.

Apêndice H: Um desafio

Sabe-se que os valores que uma função analítica tem em dada linha, mesmo que bem pequena, não podem corresponder a nenhuma outra função analítica.

Em consequência, dada uma função complexa qualquer $g(x, y)$ sobre um arco de linha, em geral não há função analítica $f(z)$ que coincida com aquela g no arco. A prova disso é bastante simples: tome-se um trecho do arco, e suponha-se que exista $f(z)$ que coincida com g nesse trecho; então essa $f(z)$ fixa valores complexos em toda a região de analiticidade, inclusive no pedaço do arco restante. Esses últimos valores não coincidem em geral, com os de g no pedaço restante.

Sabedor disso, eu me propus o seguinte desafio: seja dada no plano $\{x, y\}$ uma linha de qualquer comprimento, usando um parâmetro λ real: $x = X(\lambda)$, $y = Y(\lambda)$. Sobre essa linha seja dada uma função complexa $F(\lambda) = U(\lambda) + iV(\lambda)$. Quer-se saber quais relações devem ocorrer entre as 4 funções reais $\{X(\lambda), Y(\lambda), U(\lambda), V(\lambda)\}$ para existir função analítica $f(x, y)$ que coincida com a $F(\lambda)$ sobre a linha dada.

Caso haja tal função analítica, podemos obtê-la expressando $U(\lambda)$ e $V(\lambda)$ como funções u e v de $X(\lambda)$ e $Y(\lambda)$ unicamente, funções tais que $U = u(X, Y)$ e $V = v(X, Y)$ satisfaçam as condições de Cauchy-Riemann $u_X = v_Y$ e $u_Y = -v_X$. Ou seja, $u(X, Y)$ e $v(X, Y)$ seriam harmônicas em X e Y . Essas funções $u(X, Y)$ e $v(X, Y)$ indicam a forma das funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$, as componentes da função analítica $f(x, y)$.

Percebe-se que uma estratégia para obter a função analítica (caso ela exista) é tentar exprimir $F(\lambda)$ como uma função $F(\lambda) = F(X(\lambda) + iY(\lambda))$; isso é feito nos três exemplos a seguir, dados para ilustração, nos quais há a função analítica.

Exemplo 1: seja a linha $X(\lambda) = \lambda$, $Y(\lambda) = 0$, que claramente se estende sobre o eixo x ; e seja dada a função real $F(\lambda) = \sin \lambda$, definida sobre a linha. Como $\cosh Y(\lambda) = 1$ e $\sinh Y(\lambda) = 0$, podemos escrever $F(\lambda) = \sin X(\lambda) \cosh Y(\lambda) + i \sinh Y(\lambda) \cos X(\lambda) \equiv \sin(X(\lambda) + iY(\lambda))$, indicando a existência da função analítica $f(x, y) = \sin(x + iy)$, que tem na linha aqueles valores $F(\lambda)$.

Exemplo 2: a linha seja o círculo com raio unitário centrado em $[2, 0]$, dado por $X(\lambda) = 2 + \cos \lambda$, $Y(\lambda) = \sin \lambda$; e seja dada a função complexa $F(\lambda) = e^{2+e^{i\lambda}}$, sobre o círculo; reescrevendo esta na forma $F(\lambda) = e^{2+\cos \lambda + i \sin \lambda}$, vemos que $F(\lambda) = e^{X(\lambda) + iY(\lambda)}$, implicando a função complexa $f(x, y) = e^{x+iy}$, que é analítica.

Exemplo 3: seja dada a linha $X(\lambda) = \lambda + \lambda^2$, $Y(\lambda) = \lambda - \lambda^2$, e seja dada a função complexa $F(\lambda) = 4\lambda^3 + 2i\lambda^2(1 - \lambda^2)$. Vemos que $F(\lambda) = X^2(\lambda) - Y^2(\lambda) + 2iX(\lambda)Y(\lambda) = [X(\lambda) + iY(\lambda)]^2$, indicando a função analítica $f(x, y) = (x + iy)^2$.

-
- [1] Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*, Clarendon Press · Oxford (1997)
- [2] F.B. Hildebrand, *Advanced Calculus for Engineers*, Prentice-Hall, Inc. (1949)
- [3] Konrad Knopp, *Teoría de Funciones*, Editorial Labor, S.A. (1941)